

Giperbola

5.3.4–ta’rif. *Giperbola deb, tekislikning shunday nuqtalari to‘plamiga aytiladiki, bu nuqtalarning har biridan fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki nuqtagacha bo‘lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati berilgan o‘zgarmas songa teng bo‘ladi.*

Ta’rifda aytilgan o‘zgarmasni $2a$ deb, fokuslar orasidagi masofani $2c$ deb belgilanadi. Shu bilan birga $2c > 2a$ deb hisoblanadi. Giperbolaning sodda tenglamasini keltirib chiqarish maqsadida Dekart koordinatalar sistemasini ellips tenglamasini keltirib chiqargandagidek tanlaymiz (5.3.3-rasm). $M(x,y)$ giperbolaning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsa, uning fokal radiuslar deb ataluvchi, $r_1 = |F_1M|$ va $r_2 = |F_2M|$ lar uchun

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

U holda, giperbola ta’rifi bo‘yicha ushbu tenglamani yozish mumkin:

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

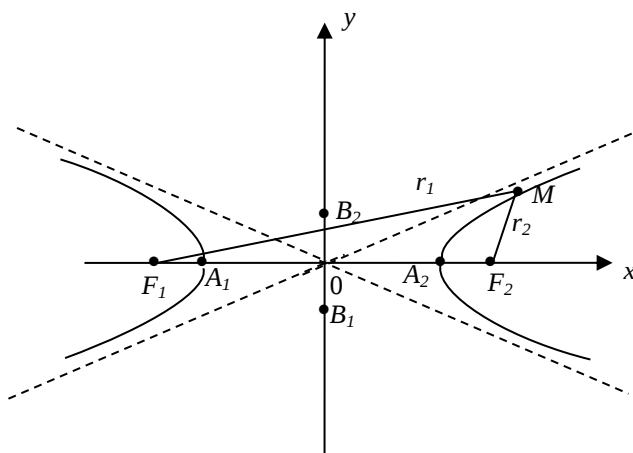
yoki

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Ellips kanonik tenglamasini keltirib chiqarishda qilingan shakl almashtirishlarni bu yerda ham bajarib, giperbolaning quyidagi *kanonik tenglamasini* olamiz:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5.3.5)$$

Bu tenglamada $b^2 = c^2 - a^2$.



5.3.3-rasm.

Giperbola haqida quyidagi mulohazalarni keltiramiz.

1) Giperbolaning (5.3.5) kanonik tenglamasidan $|x| \geq a$ bo‘lishi kerakligi yaqqol ko‘rinib turibdi. Demak $(-a; a)$ oralikda giperbolaning nuqtasi yo‘qdir. Giperbola Ox o‘q bilan $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ nuqtalarda kesishadi. Bu nuqtalar giperbolaning uchlari (5.3.3-rasm), $|A_1A_2|$ kesmani esa *giperbolaning haqiqiy o‘qi* deb ataladi. Giperbola ordinatalar o‘qi bilan kesishmaydi, shu sababli uchlari $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ nuqtalarda bo‘lgan $|B_1B_2|$

kesmani *giperbolaning mavhum o'qi* deb ataladi. a va b sonlar mos ravishda giperbolaning haqiqiy va mavhum yarim o'qlaridir.

2) (5.3.5) giperbola tarmoqlari ushbu

$$y = \frac{b}{a}x, y = -\frac{b}{a}x$$

to'g'ri chiziqlarga cheksiz yaqinlashib borishi sababli ular *giperbolaning asimptotalari* deb yuritiladi (5.3.4-rasmga qarang).

Haqiqatdan ham giperbola (5.3.5) tenglamasini y ga nisbatan yechsak,

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad |x| \geq a$$

ni olamiz. Aniqlik uchun giperbolaning koordinatalar tekisligining I choragiga tegishli qismini olib, uning ordinatasi bilan $y = \frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziq ordinatasi orasidagi ayirmani topsak,

$$\delta(x) = \frac{b}{a} \left(x - \sqrt{x^2 - a^2} \right), \quad x \geq a$$

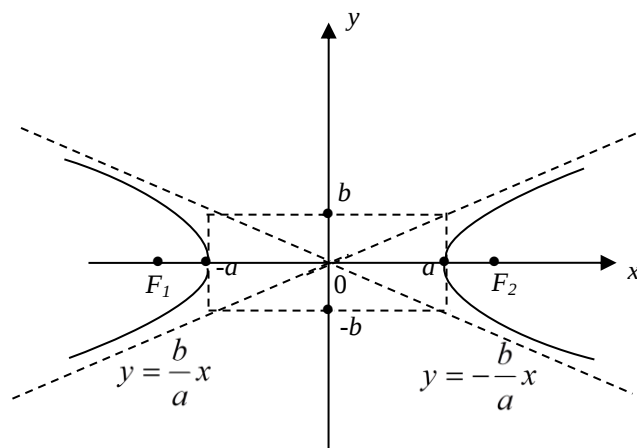
yoki oddiy shakl o'zgartirishlardan so'ng

$$\delta(x) = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

ga ega bo'lamiz. Bu ifodadan x cheksiz kattalashib borganda $\delta(x)$ nolga yaqinlashib borishi yaqqol ko'rinib turibdi, ya'ni giperbolaning koordinatalar tekisligi I choragida yotgan tarmog'i $y = \frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqqa cheksiz yaqinlashib borar ekan.

Umuman olganda giperbola ikkita $y = \pm \frac{b}{a}x$ asimptotalarga ega bo'lib, ularni koordinatalar tekisligida qurish uchun giperbolaning haqiqiy uchlari bo'lgan $A_1(-a;0)$ va $A_2(a;0)$ nuqtalar orqali Oy o'qiga parallelar hamda mavhum o'qining uchlari bo'lgan $B_1(-b;0)$ va $B_2(b;0)$ nuqtalar orqali Ox o'qiga parallelar o'tkazsak, ularning kesishishi natijasida hosil bo'lgan to'g'ri to'rtburchak *asimptotalar to'rtburchagi* deb atalib, uning diagonallari giperbola asimptotalarida yotishidan foydalanish maqsadga muvofiqdir (5.3.4-rasm).

Agar $a=b$ bo'lsa, *giperbola teng tomonli* deb ataladi va uning kanonik tenglamasi $x^2 - y^2 = a^2$ ko'rinishda bo'lib asimptotalari $y = \pm x$ dir.



5.3.4- rasm.

3) Fokuslari orasidagi masofaning haqiqiy o'qi uzunligiga nisbati *giperbolaning eksentrisiteti* deyiladi va ε orqali belgilanadi.

Ta'rifga ko'ra,

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Giperbolada $c > a$ bo'lgani sababli $\varepsilon > 1$ dir.

4) Xuddi ellipsdagidek, giperbola uchun ham ikkita simmetriya o'qlari (ular haqiqiy va mavhum o'qlar) va bitta simmetriya markazi mavjudligi uning kanonik tenglamasidan kelib chiqadi. Simmetriya markazini *giperbolaning markazi* deb ataladi. Demak, *giperbola markazli chiziqlar turkumiga tegishlidir*.

5) Agar giperbolada haqiqiy va mavhum o'qlar o'z o'rinlarini almashtirsa, uning tenglamasini

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

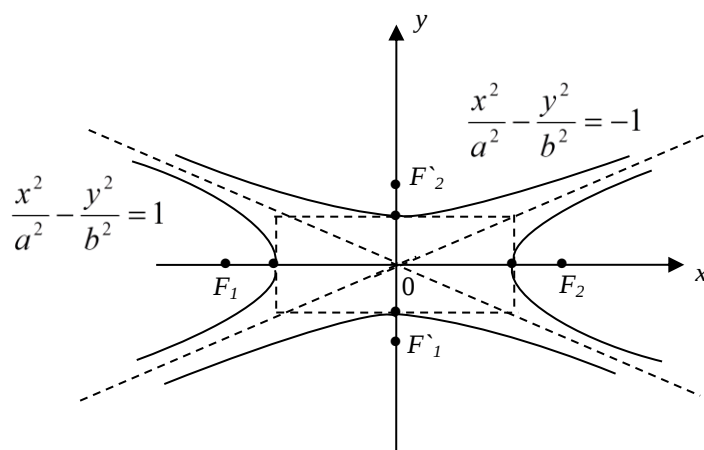
ko'rinishda yozish mumkin bo'lib, uni

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

giperbolaga *qo'shma giperbola* deb ataladi. Demak, o'zaro qo'shma giperbolalarni bitta

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

tenglama bilan ifodalash mumkin (5.3.5-rasm).



5.3.5- rasm.

5.3.4. Parabola

5.3.5-ta'rif. Parabola deb, tekislikning shunday nuqtalari to'plamiga aytiladiki, bu nuqtalarning har biri fokus deb ataluvchi berilgan nuqtadan va direktrissa deb ataluvchi berilgan to'g'ri chiziqdan teng uzoqlashgan bo'ladi.

Parabolaning sodda tenglamasini keltirib chiqarish uchun, ellips va giperbola kanonik tenglamalarini chiqarishda qilinganidek, Dekart koordinatalar sistemasi maxsus tanlanadi. Bunda fokus deb ataluvchi F nuqtadan o'tuvchi va berilgan ℓ to'g'ri chiziqqa (direktrissaga) perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqni Ox o'q deb qabul qilamiz, berilgan F nuqtadan ℓ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani p deb belgilaymiz. Agar F dan ℓ ga perpendikulyar qilib o'tkazilgan to'g'ri chiziq direktrissa bilan B nuqtada kesishadi deb faraz qilinsa, $|FB|$ kesmaning o'rtasini koordinatalar boshi O deb qabul qilamiz (5.3.6-rasm). U vaqtda, $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ bo'lib, direktrissaning tenglamasi

$$x + \frac{p}{2} = 0$$

ko'rinishda yoziladi. Parabolaning ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtasi uchun uning ta'rifiga binoan $|MD| = |MF|$ ($MD \perp \ell$, $D \in \ell$).

Agar $|MF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$, $|MD| = \left|x + \frac{p}{2}\right|$ ekanini hisobga olsak, yuqoridagi tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Bu tenglamada shakl almashtirishlar bajarib,

$$y^2 = 2px \quad (5.3.6)$$

parabolaning kanonik tenglamasini olamiz. Endi, (5.3.6) tenglama bilan aniqlangan parabola haqidagi ba'zi-bir mulohazalarni keltiraylik.

1) Parabola koordinatalar boshidan o'tadi;

2) Ox o'qqa nisbatan simmetrik, ya'ni uning faqat bitta simmetriya o'qi bo'lib, uni *parabolaning o'qi* deyiladi. Simmetriya markaziga ega emas, shu sababli parabola markazsiz chiziqlar turkumiga tegishlidir.

3) Parabolaning o'z o'qi bilan kesishish nuqtasi (qaralayotgan holda $O(0; 0)$ – koordinatalar boshi) uning *uchi* deb ataladi.

4) Agar parabolaning (5.3.6) tenglamasida x bilan y ning o'rinlarini almashtirsak, uning tenglamasi

$$x^2 = 2py$$

ko'rinishni oladi, bu holda parabola koordinatalar o'qlariga nisbatan 5.3.7-rasmda ko'rsatilgandek joylashadi.

5) Parabolaning ixtiyoriy M nuqtasidan uning F fokusigacha bo'lgan masofani $|MF| = r$ bilan, direktrissagacha bo'lgan masofani $MD = k$ bilan belgilasak, ta'rifidan $r = k$ deb yozish mumkin (5.3.6-rasmga qarang).

Parabolaning eksentrisiteti deb $\varepsilon = \frac{r}{k}$ songa aytiladi. Bu

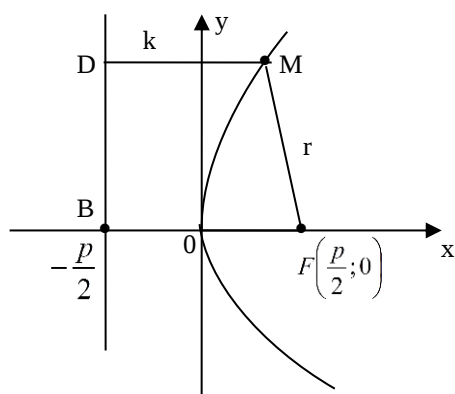
holda, ravshanki,

$$\varepsilon = \frac{r}{k} = 1.$$

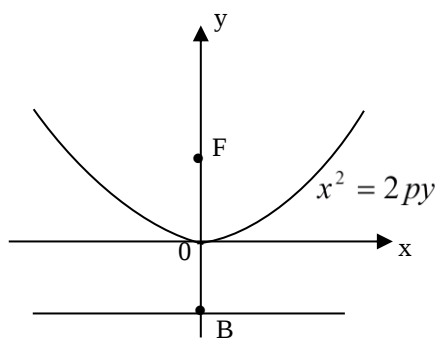
6) (5.3.6)dan parabolaning koordinatalar tekisligi I choragidagi yoyi uchun

$$y = \sqrt{2px}, \quad 0 \leq x < +\infty$$

bo'ladi. Bundan parabola I chorakdagi qismi nuqtasining obcissasi 0 dan $+\infty$ gacha o'sib borganda ordinatasi 0 dan $+\infty$ gacha o'sishni ko'rish osondir. Parabolaning IV chorakdagi yoyi haqida uning simmetriklik xossasi asosida xulosa chiqarish mumkin. (5.3.6) ning II va III choraklarga tegishli nuqtasi yo'qdir.



5.3.6- rasm.



5.3.7- rasm.